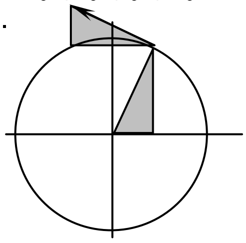
De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreide antwoorden Hoofdstuk 2
Regels voor differentiëren

Paragraaf 1 Opnieuw sinus en cosinus

1 **a.** $-2\pi, 0, 2\pi$; $-1\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$; $-\pi, \pi$; $-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$
b. $(\cos 2, \sin 2) \approx (-0{,}42 ; 0{,}91)$, met de GR
Op dezelfde hoogte: $\pi-2$, $-\pi-2$, $-2\pi+2$.
Op dezelfde breedte: -2 , $2-2\pi$, $-2+2\pi$.
Dit kun je afleiden uit de symmetrie van de eenheidscirkel, maar het kan ook (wat lomper) zo:
Op dezelfde hoogte:
$\sin t = \sin 2 \Leftrightarrow t = 2 + k\cdot 2\pi$ of $t = \pi - 2 + k \cdot 2\pi$;
de waarden van t tussen -2π en 2π vind je door voor $k = -1$ of 0 te nemen.
Op dezelfde breedte;
$\cos t = \cos 2 \Leftrightarrow t = 2 + k\cdot 2\pi$ of $t = -2 + k\cdot 2\pi$;
de waarden van t tussen -2π en 2π vind je door voor $k = -1$ of 0 te nemen in $t = 2 + k\cdot 2\pi$ en voor $k = 0$ of 1 te nemen in $t = -2 + k\cdot 2\pi$.
c. $-1\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$ uit de eenheidscirkel of:
$\sin t = \cos t \Leftrightarrow \sin t = \sin(\frac{1}{2}\pi - t) \Leftrightarrow$
$t = \frac{1}{2}\pi - t + k\cdot 2\pi$ of $t = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$2t = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\pi$.
De waarden van t tussen -2π en 2π vind je door voor $k = -2, -1, 0$ en 1 te nemen.
d. $-1\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$ uit de eenheidscirkel of met bijvoorbeeld $\cos t = \cos\frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$. Door de goede waarden voor k te nemen vind je $-1\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$ als oplossingen.
e. Zie plaatje.



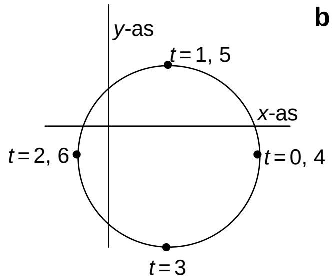
In het punt (a,b) van de eenheidscirkel is de snelheidsvector $(b,-a)$.
f. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$
g. De snelheidsvector is $(\sin t, -\cos t)$, klopt.

2 **a.** Eenheidscirkel, π, 2
b. Cirkel met middelpunt O en straal 2, 2π, 2
c. De beweging ontstaat door die uit **b** te spiegelen in de lijn $y = x$, dus cirkel met middelpunt O en straal 2, 2π, 2
d. De beweging ontstaat door die uit **b** te spiegelen in de x-as, dus cirkel met middelpunt O en straal 2, 2π, 2
e. De beweging ontstaat uit de standaard cirkelbeweging door de bewegingsrichting om te draaien, dus eenheidscirkel, 2π, 1
f. De beweging ontstaat door die uit **c** twee keer zo snel te maken, dus cirkel met straal 2, π, 4

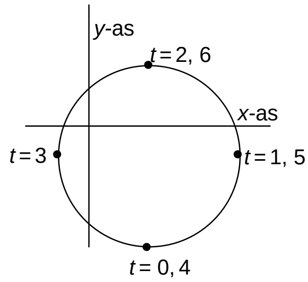
3 **a.** $(-2\sin 2t, 2\cos 2t)$; $(-2\sin t, 2\cos t)$; $(2\cos t, -2\sin t)$; $(-2\sin t, -2\cos t)$; $(\sin -t, -\cos -t)$; $(4\cos 2t, -4\sin 2t)$
b. $(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2 = 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) = 4$, dus de grootte van de snelheid is $\sqrt{4} = 2$.

4 **a.** Middelpunt (m,n), straal r, $|\omega|$ hoeksnelheid of te wel: de omlooptijd is $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.
b. $\dfrac{2\pi}{|\omega|} = \frac{1}{2}\pi$, dus $\omega = -4$, dus $\begin{cases} x = 2 + 4\cos(-4t) \\ y = 3 + 4\sin(-4t) \end{cases}$

5 **a.**

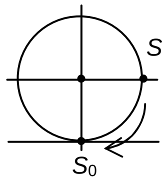


b.



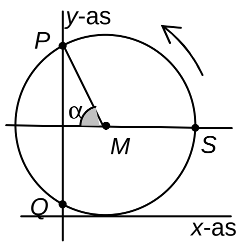
c. De tweede beweging loopt 1 seconde achter.

6 **a.** $m = 0$, $n = 2$, $r = 2$, $\omega = -\frac{1}{3}\pi$,
De beweging die in S_0 begint loopt $1\frac{1}{2}$ sec vóór op de beweging die in S begint, dus $t_0 = -1\frac{1}{2}$.

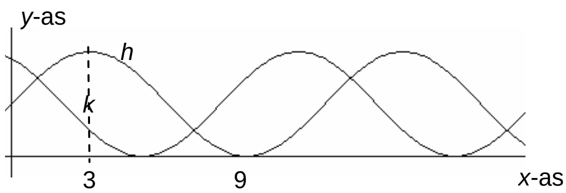


b. Ze verschillen een geheel veelvoud van 6.
c. Het kogeltje is op $t = 0$ in $(m + r\cos\varphi, n + r\sin\varphi)$, dus bijvoorbeeld $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$.
Haakjes wegwerken in $-\frac{1}{3}\pi(t + 1\frac{1}{2})$ geeft $-\frac{1}{3}\pi t - \frac{1}{2}\pi$.
Je krijgt hetzelfde.

7 **a.** Zie plaatje, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, dus $\angle PMQ = 120°$,
$P = (0{,}2 + \sqrt{3})$, $Q = (0{,}2 - \sqrt{3})$.
b. Het kogeltje doet 4 sec over $\frac{1}{3}$ deel van de cirkel, dus de periode is 12 sec.



c. $\omega = \dfrac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
d. 1, 2, 2, $\frac{1}{6}\pi$, -4
t_0 vind je als volgt: de beweging die in P begint loopt 4 sec vóór op de beweging die in S begint, dus $t_0 = -4$.
e.

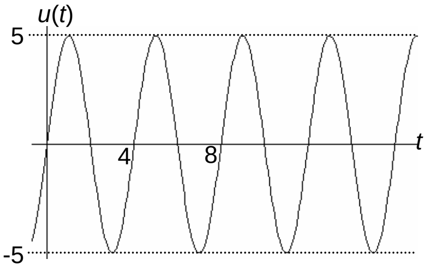


g. Door 4 eenheden naar links te schuiven (of 8 eenheden naar rechts). $k(t) = 2 + 2\sin\frac{2\pi}{12}(t+4)$

8 $|\omega| \cdot p = 2\pi$

9 **a.** -1
b. 2
c. $2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ is de helft van de periode, dus die is 3
d. $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{3}$; de straal is de amplitude, dus 2 ; de hoogte van het middelpunt is de evenwichtswaarde, dus -1
e. Omdat de beweging daar stijgend door het evenwicht gaat.
f. $f(t) = -1 + 2\sin\frac{2\pi}{3}t$
g. De grafiek van g loopt 1 sec achter op die van f, dus $g(t) = -1 + 2\sin\frac{2\pi}{3}(t-1)$
h. Die beweging loopt 33 periodes achter op die bij g.

10 **a.**



b. $u(t) = 5\sin\frac{1}{2}\pi t$
c. $5\sin\frac{1}{2}\pi t = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{1}{2}\pi t = 0{,}2$
$\sin^{-1}(0.2) = 0.2013\ldots$, dus één van de oplossingen is $0.2013\ldots/\frac{1}{2}\pi = 0{,}1281\ldots$
De tweede oplossing vind je bijvoorbeeld met de symmetrie van de grafiek : $2 - 0{,}128 = 1{,}872$

11 $y = 1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi x$; $y = -\sin\frac{1}{2}\pi x$

12 **a.** Bijvoorbeeld met de x-as: $y = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x}{2} = 1$ of $\dfrac{x}{2} = -1$, dus $x = 2$ of $x = -2$, dus de snijpunten met de x-as: (2,0) en (-2,0) ;
met de y-as: (0,3) en (0,-3) ;
$(1\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5})$ en $(1\frac{1}{5}, -2\frac{2}{5})$; $(1\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5})$ en $(-1\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5})$.
b. (x,y) op $F \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9 - 2\frac{1}{4}x^2$
d. Horizontaal met factor 2 en verticaal met factor 3
e. $(2a, 3b)$
f. $\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3b}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

13 **a.** $(2\cos t, 3\sin t)$
c. De snelheidsvector is $(-2\sin t, 3\cos t)$; zijn grootte is:
$\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 9(1 - \sin^2 t)}$.
d. v is minimaal 2 als $\sin^2 t = 1$, dat is in het hoogste punt (0,3) en in het laagste punt (0,-3) van de ellips.
v is maximaal 3 als $\sin^2 t = 0$, dat is in de snijpunten met de x-as.

14 **a.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
b. $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$ invullen in de vergelijking uit a.
c. Pythagoras: $\sin^2 + \cos^2 = 1$

15 **b.** 0
De keerpunten zijn (GR): (1,0) en (-1,0). Deze worden bereikt op de tijdstippen $t = k \cdot \pi$, met k geheel.
De snelheidsvector is $(-\sin t, 2\sin t\cos t)$. Deze is (0,0) als $t = k \cdot \pi$.
c. De algemene vergelijking van een parabool met top (a,b) is $y = p(x-a)^2 + b$.
Hier geldt dus: $y = px^2 + 1$. Het punt (1,0) moet op de parabool liggen, dus $0 = p\,1^2 + 1$, dus $p = -1$, dus een vergelijking is: $y = 1 - x^2$
d. Dan moet $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ en dat is de stelling van Pythagoras.
e. $x = \cos t$ en $-1 \le \cos t \le 1$, dus je krijgt $y = 1 - x^2$ op het x-interval [-1,1].

16 **a.** (1,1)
c. $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
d. $x^2 + y^2 = 2$
e. $(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 =$
$\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t$
$= 2\cos^2 t + 2\sin^2 t = 2 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2 \cdot 1 = 2$
f. $m = n = 0$, $r = \sqrt{2}$, $\omega = 1$, $t_0 = -\frac{1}{4}\pi$
g. $\sqrt{2}\cos(t + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}(\cos t \cdot \cos\frac{1}{4}\pi - \sin t \cdot \sin\frac{1}{4}\pi) =$
$\sqrt{2}(\cos t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \cos t - \sin t$ en
$\sqrt{2}\sin(t + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}(\sin t \cdot \cos\frac{1}{4}\pi + \cos t \cdot \sin\frac{1}{4}\pi) =$
$\sqrt{2}(\sin t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sin t + \cos t$

17 **a.** $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$ dus $4x^2 + y^2 = 1$
b. $4\sin^2 t\cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 =$
$4\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t - 2\sin^2 t\cos^2 t + \sin^4 t =$
$\cos^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t + \sin^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 = 1^2 =$ 1

18 **b.** Je moet laten zien dat $1 + \sin 2t = (\cos t + \sin t)^2$
oftewel $1 + \sin 2t = \cos^2 t + 2\sin t\cos t + \sin^2 t$ (haakjes)
oftewel $1 + \sin 2t = 1 + 2\sin t\cos t$ (Pythagoras)
Dit volgt uit de verdubbelingsformule
$\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

c. De lengte is $\int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t =$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin(2t) + 4\cos^2(2t)}\,\mathrm{d}t$.

Dit bereken je met de GR. Het resultaat is: 10,248…

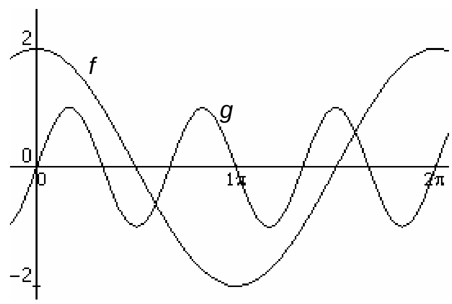
19 b. Dan moeten x en y extreem (maximaal of minimaal) zijn. t = 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $1\frac{1}{2}\pi$, 2π
(-1,1) wordt bereikt op de tijdstippen $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, met k geheel en (1,0) op de tijdstippen $t = k \cdot \pi$.
c. De snelheidsvector is $(-2\sin 2t, 2\sin t \cos t)$ en die is 0 op de in **b** genoemde tijdstippen.
d. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
We moeten aantonen dat $\sin^2 t = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$ oftewel $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ en dit is een verdubbelingsformule.

20 a. Er geldt: $x = \frac{1}{2}\sin 2t$ en $y = \cos 2t$.
De beweging $(\sin 2t, \cos 2t)$ over de eenheidscirkel wordt dus verticaal ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Dit geeft een ellips.
b. $(\cos 2t, -2\sin 2t)$

Paragraaf 2 Lissajousfiguren

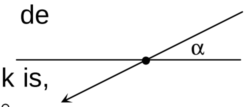
1 c. 2π , π
d. Een hoogste punt krijg je als $\sin 2t$ maximaal, dus 1 is $\Leftrightarrow 2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$. $x(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$ en $x(1\frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, dus ($\sqrt{2}$,1) en ($-\sqrt{2}$,1) zijn de hoogste punten.
Een laagste punt krijg je als $\sin 2t = -1 \Leftrightarrow$
$2t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.
De laagste punten zijn: ($-\sqrt{2}$,-1) en ($\sqrt{2}$,-1).
e. $(-2\sin t, 2\cos 2t)$.
f. In de hoogste en de laagste punten is de y-component van de snelheidsvector 0.
g. Uiterst links als $2\cos t = -2 \Leftrightarrow t = \pi$. Dit geeft het punt (-2,0). Uiterst rechts als $2\cos t = 2 \Leftrightarrow t$ = 0 of 2π. Dit geeft het punt (2,0).
De x-component van de snelheidsvector is 0.
h. Dan geldt: $\cos t = 0$ en $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$. De snelheidsvector heeft dan lengte $2\sqrt{2}$.
De snelheid is dan maximaal omdat de x- en de y-component van de snelheidsvector dan tegelijkertijd maximaal of minimaal zijn.

2 a. Amplitude van $f = 2$; amplitude van $g = 1$
b. Zie volgende kolom.
c. $f(t) = 2\cos t$ (of $2\sin(t - 1\frac{1}{2}\pi)$); $g(t) = \sin 3t$



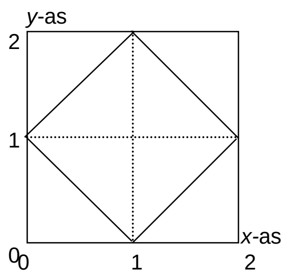
3 a. $(x', y') = (8t - 2t^3, 3t^2 - 3)$
b. Dat is in de hoogste en laagste punten van de baan.
$3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -1$; $t = 1$ geeft het punt ($3\frac{1}{2}$,-2) en $t = -1$ geeft het punt ($3\frac{1}{2}$,2).
c. Dat is in de meest linkse en rechtse punten van de baan.
$8t - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow -2t(t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow t = 0, -2, 2$.
$t = -2$ geeft (8,-2) ; $t = 0$ geeft (0,0) en $t = 2$ geeft: (8,2).
d. $x(-t) = 4(-t)^2 - \frac{1}{2}(-t)^4 = 4t^2 - \frac{1}{2}t^4 = x(t)$
enzovoort.
De baan is symmetrisch in de x-as.
e. Met de x-as: (0,0) , ($7\frac{1}{2}$,0);
met de y-as: (0,$10\sqrt{2}$) , (0,$10\sqrt{2}$).

4 a. $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 2$. De snijpunten met de y-as zijn (0,0) en (0,8).
$y = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = -2$. De snijpunten met de x-as zijn (0,0) en (8,0).
b. De snelheidsvector is $(2t - 2, 2t + 2)$.
In het laagste punt is y minimaal $\Rightarrow$
$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$, dus (3,-1) is het laagste punt.
In het meest linkse punt is x minimaal $\Rightarrow x'(t) = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$, dus (-1,3) is het meest linkse punt.
c. Als (x,y) op de baan, dan ook (y,x), ze worden op tegengestelde tijdstippen bereikt want
$(x(-t), y(-t)) = (y(t), x(t))$. Dus de baan is symmetrisch in de lijn $y = x$.
d. Als (x,y) voldoet, dan ook (y,x) want: $x + y = y + x$ en $(x - y)^2 = (y - x)^2$.
e. Dat gebeurt op $t = -2$, de snelheidsvector is dan (-6,-2). Als α de hellingshoek is, dan is $\tan\alpha = \frac{-2}{-6}$, dus $\alpha \approx 18°$.



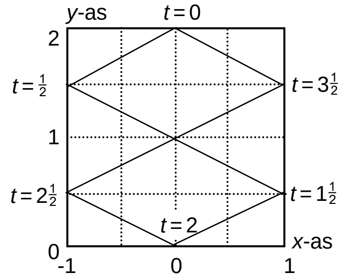
f. $v = \sqrt{8t^2 + 8}$; v is minimaal als $t = 0$. Op $t = 0$ is de buiging het sterkst.

5 a.



6 **a.** 5 keer ; zie b.

b.



7 **a.** Hoogste punt als y maximaal $\Rightarrow \sin 2t=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\pi$ of $t=1\frac{1}{4}\pi$.

Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$.

Laagste punt als y minimaal $\Rightarrow \sin 2t=-1 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4}\pi$ of $t=1\frac{3}{4}\pi$.

Dit geeft de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1)$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1)$.

b. Dan $\sin 2t=0 \Leftrightarrow t=0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\pi$. Dit geeft de punten (0,0), (1,0), (0,0), (-1,0) en (0,0).

c. Dan moet $\sin^2 2t=1-(1-2\sin^2 t)^2 \Leftrightarrow$ (verdubbelingsformule 17) $\Leftrightarrow \sin^2 2t=(1-\cos^2 2t)$) $\Leftrightarrow \sin^2 2t+\cos^2 2t=1$ en dit is formule 9 (Pythagoras).

y^2 is maximaal 1 als $(1-2x^2)=0$, dus als $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

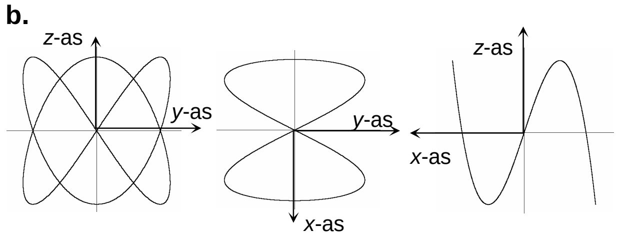
8 **a.** De y-coördinaat is 4 keer maximaal en 4 keer minimaal op $[0,2\pi]$, dus 4 periodes op $[0,2\pi]$.
De x-coördinaat is 3 keer maximaal en 3 keer minimaal op $[0,2\pi]$, dus 3 periodes op $[0,2\pi]$.

b. $(x,y)=(\sin 3t, \sin 4t)$

9 **b.** $y=1-2x^2$

10 **a.** (1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1), (-1,1,1) (-1,-1,1),
(-1,1,-1), (-1,-1,-1)

b.



van voren   van boven   van links

Je kunt het jezelf gemakkelijk maken:
Van boven zie je de beweging $(\sin t, \sin 2t)$, vanuit de y-richting $(\sin t, \sin 3t)$ en vanuit de x-richting $(\sin 2t, \sin 3t)$.

c. Dan $z=1$, dus $\sin 3t=1 \Leftrightarrow 3t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$. Voor $t=\frac{1}{6}\pi$ krijg je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$;
voor $t=\frac{5}{6}\pi$: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$: (-1,0,1).

Paragraaf 3 Periodiciteit

1 **a.** 2π: de periode kan niet kleiner zijn, zie plaatje; verder geldt: $y(x+\pi)=y(x)$ voor alle x.

b. $\frac{dy}{dt}=2\cos t+2\cos 2t$

c. $2\cos t+2\cos 2t=2\cos t+2(2\cos^2 t-1)=$
$4\cos^2 t+2\cos t-2=0 \Leftrightarrow \cos t=-1$ of $\cos t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$t=\pi$ of $t=\frac{1}{3}\pi$ of $t=1\frac{2}{3}\pi$.
Extreme waarden:
$y(\frac{1}{3}\pi)=1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $y(1\frac{2}{3}\pi)=-1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d. $y(\pi)=0$ en $y'(\pi)=0$, dus de grafiek gaat door $(\pi,0)$ en heeft daar een horizontale raaklijn, dus raakt de t-as in $(\pi,0)$.

2 **a.** $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ (verdubbelingsformule 17)
Dus $y=2\cos^2 x-4\cos x-1=2(\cos x-1)^2-3$.

b. $\cos x$ neemt alle mogelijke waarden aan tussen -1 en 1. $(\cos x-1)^2$ is maximaal als $\cos x=-1$, dus $(-2)^2=4$, dus y is maximaal $8-3=5$ als $x=\pi+k\cdot 2\pi$, met k geheel.
$(\cos x-1)^2$ is minimaal 0 als $\cos x=1$, dus y is minimaal $0-3=-3$ als $x=k\cdot 2\pi$, met k geheel.

c. $y'(x)=-2\sin 2x+4\sin x=$
$-4\sin x\cdot\cos x+4\sin x=4\sin x\cdot(1-\cos x)=0 \Leftrightarrow$
$\sin x=0$ of $\cos x=1 \Leftrightarrow x=\pi+k\cdot\pi$ of $x=k\cdot 2\pi$, met k geheel.
Als $y(\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi)=5$ is de maximale waarde en $y(k\cdot 2\pi)=-3$ is de minimale waarde van y.

3 **a.** $f(\frac{1}{8}\pi+a)=\sin(\frac{1}{8}\pi+a)+\sin(\frac{3}{8}\pi+a)$
$f(\frac{1}{8}\pi-a)=\sin(\frac{1}{8}\pi-a)+\sin(\frac{3}{8}\pi-a)$
Omdat $\sin x=\sin(\pi-x)$, geldt:
$\sin(\frac{3}{8}\pi+a)=\sin(\pi-(\frac{3}{8}\pi+a))=\sin(\frac{1}{8}\pi-a)$.
Voor a in de laatste formule $-a$ invullen geeft:
$\sin(\frac{3}{8}\pi-a)=\sin(\frac{1}{8}\pi+a)$. Dus:
$\sin(\frac{1}{8}\pi+a)+\sin(\frac{3}{8}\pi+a)=\sin(\frac{3}{8}\pi-a)+\sin(\frac{1}{8}\pi-a)$
De grafiek is symmetrisch in de lijn $x=\frac{1}{8}\pi$.

b. 2π

c. $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi)=\frac{3}{8}\pi$; $2\sin\frac{3}{8}\pi$; $\frac{1}{8}\pi$

4 **a.** Een ruit

b. α, $\frac{1}{2}\alpha$

c. De beweging loopt $\frac{1}{2}\alpha$ voor op de standaardcirkel-beweging. Als M het snijpunt is van PQ en OR, dan $OM=\cos\frac{1}{2}\alpha$, dus de straal van de cirkel waarover R beweegt is $2\cos\frac{1}{2}\alpha$.

e. Door voor $t=a$ te nemen en voor $\alpha=b-a$.
[NB: $\cos\frac{1}{2}(a-b)=\cos\frac{1}{2}(b-a)$ en $t+\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}(a+b)$]

5 **a.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

b. $1+\cos b=2\cos -\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}b$; dit klopt, want $\cos -\frac{1}{2}b=\cos\frac{1}{2}b$ en $1+\cos b=2\cos^2\frac{1}{2}b$ is verdubbelingsformule 17.
En: $\sin b=2\cdot\cos -\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}b$. Dit klopt want:
$\cos -\frac{1}{2}b=\cos\frac{1}{2}b$ en $\sin b=2\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\sin\frac{1}{2}b$ is verdubbe-lingsformule 16.

c. $2\cos a=2\cdot 1\cdot\cos a$ en $2\sin a=2\cdot 1\cdot\sin a$

d. $\cos -b=\cos b$

e. $\sin a-\sin b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-b)$

f. In de eerste formule b door $b-\pi$ geeft:

$\cos a + \cos(b-\pi) = 2\cos(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a-b)) \cdot \cos(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a+b))$ dus: $\cos a - \cos b = 2\sin -\frac{1}{2}(a-b) \cdot \sin\frac{1}{2}(a+b)$. Want:
$\cos(b-\pi) = -\cos b$, volgt uit 2 en 4,
$\cos(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a-b)) = -\sin\frac{1}{2}(a-b)$ volgt uit 8 en 1.
$\cos(-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(a+b)) = \sin\frac{1}{2}(a+b)$ volgt uit 2 en 8.

6 $\sin x + \sin(x+\frac{1}{4}\pi) = 2\cos\frac{1}{2}(x - x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \sin\frac{1}{2}(2x + \frac{1}{4}\pi) = 2\cos -\frac{1}{8}\pi \cdot \sin(x + \frac{1}{8}\pi)$
en $\cos -\frac{1}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi = \sin\frac{3}{8}\pi$ volgens 2 en 8.

7 $\sin a = 2\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}a$
en dit volgt uit verdubbelingsformule 16.

8 **a.** $\cos a$, want $\sin 7$ is een constante, heeft dus afgeleide 0.
b. $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot -\sin\frac{1}{2}(a-7)\sin\frac{1}{2}(a+7) + 2\cos\frac{1}{2}(a-7)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(a+7)$
c. Dit volgt ook uit formule 12 met $\alpha = \frac{1}{2}(a+7)$ en $\beta = \frac{1}{2}(a-7)$.

9 **a.** Periode $f = \frac{2\pi}{9}$, dus de frequentie $f = \frac{9}{2\pi}$.
Periode $g = \frac{2\pi}{10}$, dus de frequentie $g = \frac{10}{2\pi}$.
Het frequentieverschil is $\frac{1}{2\pi}$.
b. 9, 10
c. $\frac{1}{18}\pi - \frac{1}{20}\pi = \frac{1}{180}\pi$
d. 2π
e. $r(t) = 2\cos\frac{1}{2}t \cdot \sin 9\frac{1}{2}t$ (Simpson)
f. Omdat $-1 \le \sin 9\frac{1}{2}t \le 1$
g. In de raakpunten is de helling niet 0, in de toppen wel.
h. $\cos\frac{1}{2}t = 0$ of $\sin 9\frac{1}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = \pi$ of $9\frac{1}{2}t = k\cdot\pi$, met k geheel $\Leftrightarrow t = \pi$ of $t = k\cdot\frac{2}{19}\pi$, met k = 0, 1, 2, ..., 19.

10 **a.** $f(x) = 2\cos 2x \cdot \cos 3x$ (Simpson)
b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ of $\cos 3x = 0$. De kleinste positieve x waarvoor $\cos 2x = 0$ is $\frac{1}{4}\pi$ en de kleinste positieve x waarvoor $\cos 3x = 0$ is $\frac{1}{6}\pi$; de afstand is dus $\frac{1}{12}\pi$.

11 **b.** $f(t) = 2\cdot\cos t\cdot\sin 2t$ (Simpson), dus $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$ of $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, -\pi, 0, \pi$.
c. $f'(t) = \cos t + 3\cos 3t$, dus $f'(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$ en $f(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$, dus de grafiek van f raakt de t-as in $(\pm\frac{1}{2}\pi, 0)$.

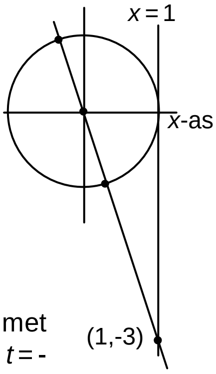
12 **b.** $\sin\pi(x-t) + \sin\pi(x+t) = 2\cos\pi t\cdot\sin\pi x$ volgens de tweede formule van Simpson.
c. amplitude $0{,}1\sqrt{3}$, periode 2
d. $\sin\pi x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4$
e. $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ uitwijking is $0{,}2\cos\pi t$, dus amplitude = 0,2, periode = 2, frequentie = $\frac{1}{2}$
f. $2\sin\pi x = 1$of $2\sin\pi x = -1 \Leftrightarrow \sin\pi x = \frac{1}{2}$ of $\sin\pi x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k + \frac{1}{6}$, $x = 2k + \frac{5}{6}$ of $x = 2k - \frac{1}{6}$, $x = 2k - \frac{5}{6}$ met k geheel.

13 **a.** $\sin x + \sin 3x = 2\cos x\cdot\sin 2x$ (Simpson)
$\sin 2x + \sin 4x = 2\cos x\cdot\sin 3x$ (Simpson), dus $f(x) = 2\cos x\cdot(\sin 2x + \sin 3x) = 2\cos x\cdot 2\cos\frac{1}{2}x\cdot\sin 2\frac{1}{2}x$
b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ of $\cos\frac{1}{2}x = 0$ of $\sin 2\frac{1}{2}x = 0$.
De eerste zes positieve waarden van x zijn dus: $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $1\frac{1}{5}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

Paragraaf 4 Tangens

1 **a.** A is het punt (1,0).
De helling van lijn $OP = \dfrac{y_Q}{OA} = \dfrac{y_Q}{1} = \tan t$.
b. Als $t = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$, met k geheel, want dan snijdt lijn OP de lijn $x = 1$ niet meer.
c. De helling van lijn $OP = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

2 **a.** Teken op de lijn $x = 1$ het punt met y-coördinaat -3. De lijn door de oorsprong en dit punt snijdt de cirkel in de gevraagde punten.
$\text{inv}\tan -3 \approx -1{,}25$,
De punten zijn $(\cos t, \sin t)$ met $t \approx -1{,}25$ en $t \approx -1{,}25 + \pi$, dus (0,32 , -0,95) , (-0,32 , 0,95)
b. De tijdstippen $t = -1{,}25 + k\cdot\pi$, met k geheel tussen -7 en 7, dus t = -4,39, -1,25, 1,89, 5,03



3 **a.** $\tan\frac{1}{6}\pi = \dfrac{\sin\frac{1}{6}\pi}{\cos\frac{1}{6}\pi} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ enzovoort,
1, $\sqrt{3}$
b. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$

4 **a.** Zie het plaatje bij opgave 1: A is het punt (1,0) en B de projectie van P op de y-as. Dan $\Delta BPO \sim \Delta AOQ$, dus:
$\dfrac{OP}{BP} = \dfrac{OQ}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|\cos t|} = \dfrac{OQ}{1}$.
Omdat het over de lengte van OQ gaat, en die is positief of nul.
b. Stelling van Pythagoras in driehoek AQO
c. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow$ (delen door $\cos^2 t$)
$\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$

5 **b.** Als $t < \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig groot; als $t > \frac{1}{2}\pi$ en t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan wordt de richtingscoëfficiënt van lijn OP willekeurig klein (negatief). Vandaar een verticale asymptoot $x = \frac{1}{2}\pi$. Zo ook $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k geheel.

c. Als t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, nadert de noemer $\cos t$ tot 0 en de teller $\sin t$ tot 1 .

6 **a.** $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

b. Tangens is periodiek met periode π.

7 **a.** $\tan a - \tan b =$

$$\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cdot\cos b - \sin b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

volgens formule 15.

b. Neem $a = x+\Delta x$ en $b = x$ in a, dan krijg je:

$\tan(x+\Delta x) - \tan x = \dfrac{\sin(\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$, dus:

$$\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}.$$

Als $\Delta x \to 0$, dan $\dfrac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \to 1$, dus

$$\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x} \to \frac{1}{\cos x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9 **a.** Bijvoorbeeld met de kettingregel:
$x \to \tan x = a \to a^2 = y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\cdot\frac{da}{dx} = 2a\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$$

Het kan ook met de productregel:
$y = \tan x\cdot\tan x$,

Dan $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan x + \tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ en je vindt hetzelfde.

b. Met de kettingregel: $x \to \tan x = a \to \sqrt{a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\cdot\frac{da}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

c. Bijvoorbeeld met de quotiëntregel:

$$y' = \frac{0-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

d. $y = \dfrac{1}{\tan x} + 1$, dus je krijgt hetzelfde als in **c**.

10 **a.** $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1$ of $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = -\frac{1}{4}\pi$, De snijpunten zijn dus $(\frac{1}{4}\pi,1)$ en $(-\frac{1}{4}\pi,1)$.

b. $F'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$, zie opgave 4b.

c. Oppervlakte $= \frac{1}{2}\pi - (F(\frac{1}{4}\pi) - F(-\frac{1}{4}\pi)) = \pi - 2$

11 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$ en $f''(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ met k geheel.
$f(k\pi) = -k\pi$, de buigpunten zijn dus: $(k\pi,-k\pi)$; deze liggen op de lijn $y = -x$.

b. $F'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}\cdot -\sin x = \tan x$

c. Oppervlakte =
$F(\frac{1}{4}\pi) - F(0) = \ln\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{32}\pi^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{32}\pi^2$

Rekentechniek

1 Van links naar rechts
min $-1\frac{1}{2}$ als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
max $2\frac{1}{2}$ als $\sin x = -1$, dus als $x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

min 0 als $\cos x = -1$, dus als $x = \pi + k\cdot 2\pi$
max 4 als $\cos x = -1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$

min -1 als $x = -1$
geen max

min -1 als $x = -1$, want $y = (x+1)^2 - 1$
geen max

min -1 als dus $x = \pi + k\cdot 2\pi$
max 3 als $\cos x = 1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$

min -1 als $x = \pi + k\cdot 2\pi$ (zie voorgaande)
max 3 als $x = k\cdot 2\pi$

min $-1\frac{1}{2}$ als $\sin^2 2x = 1$, dus als $\sin 2x = 1$ of als $\sin 2x = -1$, dus $x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\frac{1}{2}\pi$
max $\frac{1}{2}$ als $\sin^2 2x = 0$, dus als als $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\frac{1}{2}\pi$

min 0 als $x = k\cdot\pi$
max 1 als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

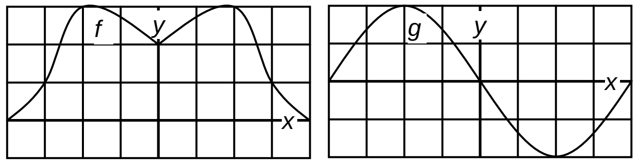
min e^{-1} als $\sin x = -1$, dus als $x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
max e als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

geen min
max 0 als $\sin x = 1$, dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

b. min -3 als $\cos x = 1$, dus als $x = k\cdot 2\pi$
max 5 als $\cos x = -1$, dus als $x = \pi + k\cdot 2\pi$

2 **a.** K: $x(-t) = -x(t)$ en $y(-t) = y(t)$; symmetrisch in de y-as
L: $x(-t) = x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$; symmetrisch in de x-as
M: $x(-t) = -x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$; puntsymmetrisch in $O(0,0)$
b. $x(\pi - t) = -x(t)$ en $y(\pi - t) = y(t)$; symmetrisch in de y-as

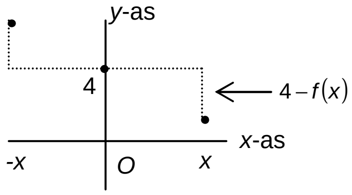
3 **a,b**



c. De grafiek van f is symmetrisch in de y-as, de grafiek van g is puntsymmetrisch in O.

4 **a.** $\sin(\frac{1}{4}\pi+x)=\cos(\frac{1}{2}\pi-(\frac{1}{4}\pi+x))=\cos(\frac{1}{4}\pi-x)$
$\cos(\frac{1}{4}\pi+x)=\sin(\frac{1}{2}\pi-(\frac{1}{4}\pi+x))=\sin(\frac{1}{4}\pi-x)$, klopt.
Symmetrisch in de lijn $x=\frac{1}{4}\pi$
b. $y=\sin(\text{-}x)+\cos(\text{-}x)=\text{-}\sin x+\cos x$
c. $y=\text{-}\sin x-\cos x$
d. $g(x)=4-\sin x-\cos x$

5 **a.**



$f(\text{-}x)=4+4-f(x)=8-\dfrac{4}{x^2+1}$ $f(x)=8-\dfrac{4}{x^2+1}$

b. $g(x)=1-(1-\sin(\pi-x))=2-\sin x$
Je kunt eenzelfde soort platje maken.

6 $f(x)=\frac{1}{2}x+\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}x\,e^x-\frac{1}{2}x+x}{e^x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}x\,e^x+\frac{1}{2}x}{e^x-1}$

$f(\text{-}x)=\dfrac{\text{-}\frac{1}{2}x\,e^{\text{-}x}-\frac{1}{2}x}{e^{\text{-}x}-1}\cdot\dfrac{e^x}{e^x}=\dfrac{\text{-}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\,e^x}{1-e^x}=f(x)$,
voor alle $x\neq 0$.

7 **a.** $h(a-x)=h(a+x)$ voor alle x,
of $h(2a-x)=h(x)$ voor alle x
b. Het gemiddelde van j en k is b, dus:
$\frac{1}{2}(j(x)+k(x))=b$ voor alle x
Ook: $j(x)+b=b-k(x)$ voor alle x
c. $b-k(a+x)=k(a-x)-b$ voor alle x

8 Van links naar rechts:
- $t=\frac{1}{2}x$ invullen in $y=t+2$ geeft: $y=\frac{1}{2}x+2$
- $t=y-2$ invullen in $x=t^2+2t$ geeft: $x=y^2-2y$
- $t=y-2$ invullen in $x=t^3$ geeft: $x=(y-2)^3$
- $x=\ln t^3 \Leftrightarrow t=e^{\frac{1}{3}x}$, voor $t=e^{\frac{1}{3}x}$ invullen in $y=t^2+2$ geeft: $y=e^{\frac{2}{3}x}+2$
- $\sin t$ in $y=\sin t+2$ vervangen door x geeft: $y=x+2$
- $\sin t$ in $x=\sin^2 t$ vervangen door $y-2$ geeft: $x=(y-2)^2$
- $x^2+y^2=1$
- $x+y^2=1$

9 **a.** Er geldt: $O^3=216R^6$ en $V^2=R^6$, dus:
$O^3=216V^2$, dus $O=6\sqrt[3]{V^2}$ en $V=\sqrt{\dfrac{O^3}{216}}$.
b. $B=\dfrac{30}{L}$ invullen in

$K=\dfrac{18547}{L}+56{,}6L+\dfrac{5279}{B}+90{,}8B$ geeft

$K=\dfrac{18547}{L}+56{,}6L+\dfrac{5279}{30}\cdot L+\dfrac{90{,}8}{L}\cdot 30$

$=\dfrac{21271}{L}+232{,}6L$.

c. A vervangen door $\frac{1}{3}q^2$ in $K=0{,}1A+150$
geeft: $K=\frac{1}{30}q^2+150$

10 **a.** Uit de stelling van Pythagoras volgt dat de hoogte van de lantaarn $=\sqrt{r^2-25}$, dus

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{r^2-25}}{r}$

b. $L=\dfrac{1}{r^2}\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\sqrt{r^2-25}}{r}=\dfrac{\sqrt{r^2-25}}{r^3}$, dus

$L^2=\dfrac{r^2-25}{r^6}=\dfrac{r^2}{r^6}-\dfrac{25}{r^6}=\dfrac{1}{r^4}-\dfrac{25}{r^6}$

11 **a.** Noem ded lengte van het pad a, dan is de tijd over de heenweg $\dfrac{a}{4}$ en over de terugweg $\dfrac{a}{6}$, dus de tijd over een afstand van $2a$ is $\dfrac{a}{4}+\dfrac{a}{6}=\dfrac{5a}{12}$,
dus de gemiddelde snelheid is $2a$: $\dfrac{5a}{12}=\dfrac{24}{5}=4{,}8$ km/u
b. $t=t_1+t_2$
c. $v_1\cdot t_1=A$, $v_2\cdot t_2=A$, $v\cdot t=2A$
d. $\dfrac{A}{v_1}+\dfrac{A}{v_2}=\dfrac{2A}{v}$, beide leden van de vergelijking delen door A geeft het resultaat.
e. $v=\dfrac{2v_1\cdot v_2}{v_1+v_2}$

12 **a.** $i_1=\dfrac{V}{R_1}$, $i_2=\dfrac{V}{R_2}$, $i=\dfrac{V}{R}$, dus $i=i_1+i_2$ geeft:

$\dfrac{V}{R_1}+\dfrac{V}{R_2}=\dfrac{V}{R}$, dus (delen door V): $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{R}$.

b. $R=\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$

c. $R=\dfrac{R_1\cdot R_2\cdot R_3}{R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_3}$